



گزینه ۱

۱

تابع $f(x)$ خطی است. بنابراین تابع $g(x)$ تابعی چندجمله‌ای از درجه دوم است. دقت کنید در تابع‌های درجه دوم آهنگ تغییرات متوسط در بازه $[a, b]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر در نقطه $x = \frac{a+b}{2}$ (وسط بازه) برابر است.

بنا بر آنچه گفته شد، آهنگ تغییرات متوسط تابع $g(x)$ در بازه $[-1, 3]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییرات در $x = 1$ برابر و اختلاف آن‌ها صفر است.

$$(a + 3)x - ay = 3 \Rightarrow y = \left(\frac{a+3}{a}\right)x - \frac{3}{a}$$

شیب خط داده شده برابر با $\left(\frac{a+3}{a}\right)$ است. برای آنکه این خط به خطوط مماس بر منحنی عمود باشد، باید شیب خط مماس بر منحنی برابر با $\left(\frac{-a}{a+3}\right)$ باشد (توجه: اگر دو خط بر هم عمود باشند، شیب آن‌ها قرینه و معکوس یکدیگر است).

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی} = f'(x) = \frac{2 \times 2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{-a}{a+3}$$

برای به دست آوردن x ، باید طرفین معادله را به توان ۲ برسانیم:

$$\frac{4x^2}{x^2+2} = \left(\frac{a}{a+3}\right)^2 \Rightarrow 4x^2 = \left(\frac{a}{a+3}\right)^2 x^2 + 2\left(\frac{a}{a+3}\right)^2 \Rightarrow x^2 = \frac{2\left(\frac{a}{a+3}\right)^2}{4 - \left(\frac{a}{a+3}\right)^2}$$

برای آنکه این معادله جواب داشته باشد، باید باتوجه به نامنفی بودن x^2 ، سمت راست معادله نیز نامنفی باشد:

$$\frac{2\left(\frac{a}{a+3}\right)^2}{4 - \left(\frac{a}{a+3}\right)^2} \geq 0 \xrightarrow[\text{نامنفی است}]{\text{صورت کسر}} 4 - \left(\frac{a}{a+3}\right)^2 > 0 \Rightarrow -2 < \frac{a}{a+3} < 2$$

$$\begin{cases} \frac{a}{a+3} > -2 \Rightarrow \frac{a}{a+3} + 2 > 0 \Rightarrow \frac{3a+6}{a+3} > 0 \Rightarrow (a < -3) \cup (a > -2) \\ \frac{a}{a+3} < 2 \Rightarrow \frac{a}{a+3} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{-a-6}{a+3} < 0 \Rightarrow (a < -6) \cup (a > -3) \end{cases}$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده برابر است با:

$$(a < -6) \cup (a > -2) = \mathbb{R} - [-6, -2]$$

برای یافتن شیب خط مماس بر f در $x = 1$ از فرمول تعریف مشتق استفاده می‌کنیم.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1) \log(x + 9) - 0}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1) \log(x + 9) - 0}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) \log(x + 9) = 3 \times 1 = 3 \quad \text{شیب خط مماس}$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow m = 3, (1, 0) \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y - 0 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 3 \xrightarrow{x=0} y = -3$$

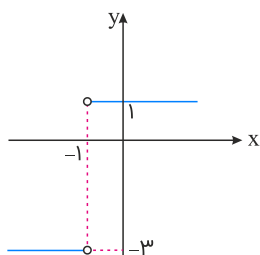
$x = -1$ ریشه ساده عبارت داخل قدر مطلق است، پس f در این نقطه، مشتق‌ناپذیر است: $-1 \notin D_{f'}$
ضابطه f را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = |2x + 2| - x = \begin{cases} 2x + 2 - x & ; x \geq -1 \\ -2x - 2 - x & ; x < -1 \end{cases} = \begin{cases} x + 2 & ; x \geq -1 \\ -3x - 2 & ; x < -1 \end{cases}$$

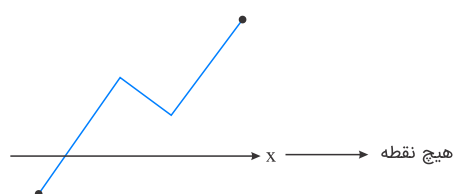
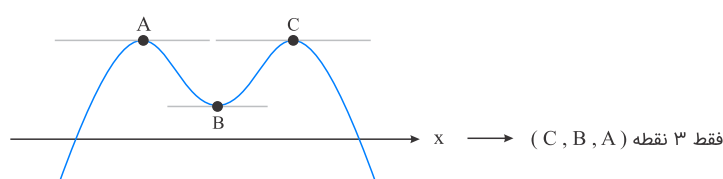
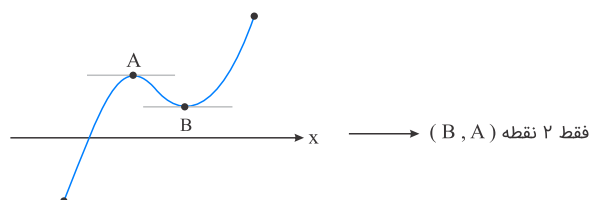
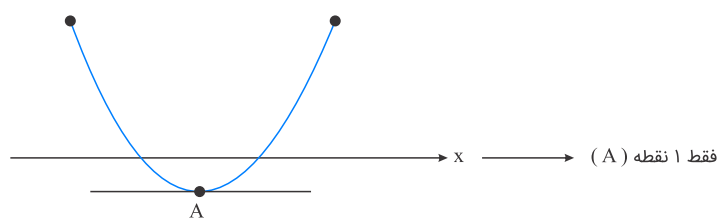
ضابطه f' را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & ; x > -1 \\ -3 & ; x < -1 \end{cases}$$

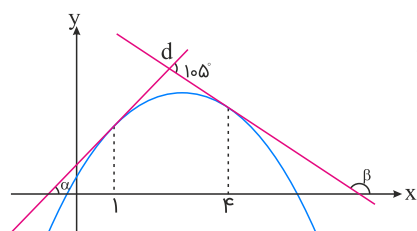
نمودار آن به صورت زیر است:



باید دنبال نموداری باشیم که فقط دو خط مماس افقی دارد. این ویژگی فقط در نمودار گزینه (۲) وجود دارد:



می‌دانیم مقدار مشتق در نقطه‌ای به طول a به معنای شیب خط مماس بر منحنی در همان نقطه است و البته شیب خط برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد؛ بنابراین:



$$\begin{aligned} f'(1) &= m_d = \tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ \\ \Rightarrow \beta &= \alpha + (180^\circ - 105^\circ) = 60^\circ + 75^\circ = 135^\circ \\ \Rightarrow f'(4) &= \tan \beta = \tan 135^\circ = -1 \end{aligned}$$

$$f(a) > 0, f'(a) < 0 \Rightarrow f(a).f'(a) < 0 \quad \checkmark$$

$$f(b) > 0, f'(b) > 0 \Rightarrow f(b).f'(b) > 0$$

$$f(c) > 0, f'(c) = 0 \Rightarrow f(c).f'(c) = 0$$

$$f(D) = 0, f'(D) < 0 \Rightarrow f(D).f'(D) = 0$$

$$f(E) < 0, f'(E) > 0 \Rightarrow f(E).f'(E) < 0 \quad \checkmark$$

$$f(F) > 0, f'(F) > 0 \Rightarrow f(F).f'(F) > 0$$

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه "۱": به ازای $x > 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y > 0$ ؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

به ازای $x < 0 \leftarrow f'(x) < 0$ و $y > 0$ ؛ پس برابر نیست.

گزینه "۲": به ازای $x > 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y > 0$ ؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

به ازای $x < 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y < 0$ ؛ پس برابر نیست.

گزینه "۳": به ازای $x > 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y > 0$ ؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

به ازای $x < 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y > 0$ ؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

گزینه "۴": به ازای $x > 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y > 0$ ؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

به ازای $x < 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y < 0$ ؛ پس برابر نیست.

$$y' = \frac{10x - \frac{3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{3x + \sqrt{x}}}}{3\sqrt[3]{\left(5x^2 - \sqrt{3x + \sqrt{x}} + 5\right)^2}} \bigg|_{x=1} = \frac{10 - \frac{7}{4}}{3 \times 4} = \frac{73}{96}$$

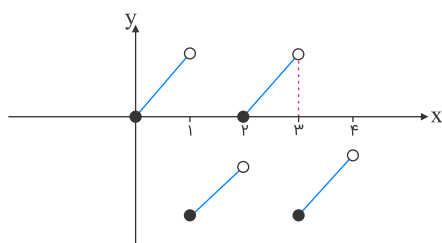
شیب خط مماس در نقطه ۳ برابر با ۴ است که همان $f'(3)$ می‌شود. حال حد خواسته شده در مسئله را مرتب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3+2h)}{6h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h} \times \frac{-1}{6} - \frac{f(3+2h) - f(3)}{2h} \times \frac{2}{6} \\ &= -\frac{1}{6}f'(3) - \frac{2}{6}f'(3) = -\frac{1}{2}f'(3) = -\frac{1}{2} \times 4 = -2\end{aligned}$$

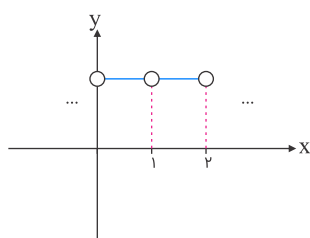
$$f(x+T) = f(x) \xrightarrow[\text{مشتق می‌گیریم}]{\text{از دو طرف}} f'(x+T) = f'(x)$$

پس اگر f متناوب باشد، مشتق آن حتماً متناوب است؛ پس گزینه ۱ و ۴ بدیهی است، اما در مورد گزینه ۳، به مثال زیر دقت کنید:

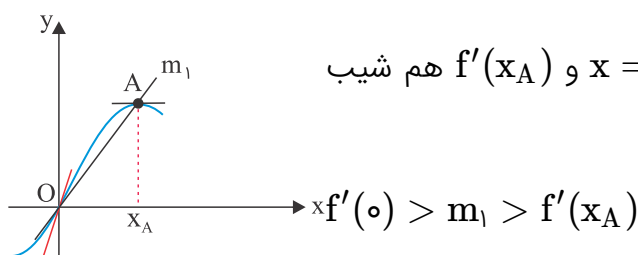
واضح است که: $f(x+2) = f(x)$



اما با توجه به اینکه شیب همه خط‌ها یک است، مشتق آن به این صورت می‌شود: $f'(x+1) = f'(x)$



پس گزینه ۳ هم درست است ولی اگر از $f(x) = x + Cx$ که تابعی غیر متناوب است مشتق بگیریم، به تابعی متناوب تبدیل می‌شود.



مطابق شکل، شیب خط مماس بر نمودار $f(x)$ در $x = 0$ و $f'(x_A)$ هم شیب خط مماس بر $f(x)$ در نقطه A است. پس:

نکته: در توابع $y = |f(x)|$ ریشه‌های ساده $f(x)$ ، نقاط مشتق‌ناپذیر هستند. بنابراین بایستی $f(x) = 4x^2 - mx + 1$ یا فاقد ریشه باشد و یا دارای ریشه مضاعف، پس داریم:

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (-m)^2 - 4(4)(1) \leq 0 \Rightarrow m^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq m \leq 4 \quad (I)$$

از طرفی باتوجه به اینکه $\Delta \leq 0$ است، بنابراین عبارت $4x^2 - mx + 1$ همواره بزرگ‌تر مساوی صفر می‌باشد. پس:

$$y = |4x^2 - mx + 1| = 4x^2 - mx + 1$$

حال می‌دانیم تابع درجه دوم با ضریب مثبت x^2 بعد از رأس اکیداً صعودی خواهد بود، بنابراین:

$$x_S = \frac{-(-m)}{4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow m \leq 2 \quad (II)$$

بنابراین اشتراک دو بازه $-4 \leq m \leq 2$ است.

آهنگ متوسط تغییرات تابع f در بازه $[a, b]$ همان شیب خط واصل بین دو نقطه به طول‌های a و b بر نمودار f است، یعنی شیب همین خط $y = mx - 3$ پس شیب این خط برابر ۴ می‌باشد و $m = 4$ است. از طرف دیگر برای پیدا کردن طول نقاط تلاقی a و b ، می‌دانیم که باید منحنی f را با خط $y = 4x - 3$ قطع دهیم:

$$3x - 2x^2 = 4x - 3 \Rightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$$

a و b ریشه‌های این معادله هستند، پس:

$$a^3 + b^3 = s^3 - 3ps \xrightarrow[p=\frac{c}{a}=\frac{-3}{2}]{s=\frac{-b}{a}=\frac{-1}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{8} - \frac{9}{4} = -\frac{19}{8}$$

نکته: توابع شامل جزء صحیح در نقطه‌ای به طول x_0 که به ازای آن عبارت داخل جزء صحیح، عددی صحیح شود، معمولاً ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. زمانی تابع در x_0 مشتق‌پذیر می‌شود که x_0 طول $\min$ (نسبی) عبارت داخل جزء صحیح بوده و یا در x_0 ، پشت جزء صحیح عامل صفرشونده از درجه ۲ (یا بیشتر از ۲) وجود داشته باشد.

ابتدا از روی حدود x ، حدود عبارت داخل جزء صحیح را می‌سازیم. داریم:

$$4 < x < 8 \Rightarrow \frac{4}{3} < \frac{x}{3} < \frac{8}{3}$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید $\frac{x}{3}$ در تنها $x = 6$ مقدار صحیح به خود می‌گیرد. چون در صورت مسئله به این جمله اشاره شده است که تابع در این بازه مشتق‌پذیر است. پس باید در $x = 6$ ، پشت جزء صحیح عامل صفرشونده از درجه ۲ قرار دهیم تا تابع در این بازه مشتق‌پذیر باشد. به عبارت دیگر $x = 6$ ریشه مضاعف عبارت پشت جزء صحیح باشد. داریم:

$$x = 6 \text{ عامل صفرشونده در } x = 6 \text{ از درجه } 2 \Rightarrow (x - 6)^2 = x^2 - 12x + 36 = x^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} b = -12 \\ c = 36 \end{cases}$$

در نتیجه حاصل $b + 2c$ برابر است با:

$$b + 2c = (-12) + 2(36) = 60$$

در هر مسیر به‌طور جداگانه آهنگ تغییر لحظه‌ای و متوسط را بررسی می‌کنیم: (می‌دانیم آهنگ تغییر لحظه‌ای شیب خط مماس و آهنگ تغییر متوسط شیب واصل بین دو سر بازه است)

مسیر "۱":

آهنگ تغییر متوسط < آهنگ تغییر لحظه‌ای < ۰

مسیر "۲":

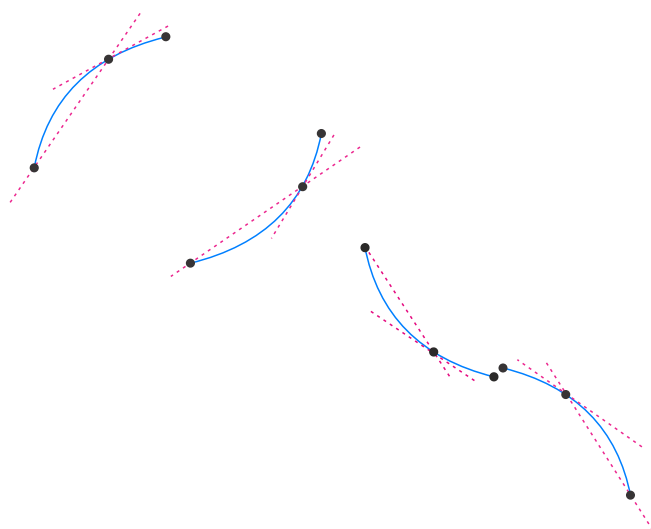
آهنگ تغییر لحظه‌ای < آهنگ تغییر متوسط < ۰

مسیر "۳":

۰ < آهنگ تغییر لحظه‌ای < آهنگ تغییر متوسط

مسیر "۴":

۰ < آهنگ تغییر متوسط < آهنگ تغییر لحظه‌ای



$$f(t) = \sqrt[p]{t^p + k} = (t^p + k)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{1}{p}(t^p + k)^{-\frac{p-1}{p}} \times pt = \frac{pt}{p \sqrt[p]{(t^p + k)^p}}$$

از آنجا که t زمان و لذا همواره مثبت است، پس $f'(t) > 0$ و آهنگ رشد جمعیت همواره مثبت می‌باشد. اما دقت کنید در یک بازه زمانی طولانی ($t \rightarrow +\infty$) داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{pt}{p \sqrt[p]{(t^p + k)^p}} &= \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{همارزی پرتوان}} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{pt}{p \sqrt[p]{(t^p + k)^p}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{pt}{p \sqrt[p]{(t^p)^p}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{pt}{p \sqrt[p]{t^p}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{pt}{p t^{\frac{p}{p}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p}{p} = \frac{p}{+\infty} = 0^+ \end{aligned}$$

پس آهنگ رشد جمعیت در درازمدت، عدد مثبت بسیار کوچکی است.

باتوجه به تعریف مشتق تابع $y = g(x)$ در نقطه معلوم $x = 2$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} g'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)f(x) - 0}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) \times \lim_{x \rightarrow 2} ([x] + [-x]) = 4(-1) = -4 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow a \in \mathbb{R}} f(x) = -1 \text{ بنابراین } f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ دقت کنید:}$$

شیب خط گذرنده از دو نقطه به طول‌های $x = ۲$ و $x = ۲ + k$ روی منحنی f برابر است با:

$$m = \frac{f(۲+k) - f(۲)}{۲+k-۲}$$

در صورت سؤال گفته شده این کسر با $\frac{۱۲-۲k}{k+۴}$ برابر است:

$$m = \frac{۱۲-۲k}{k+۴}$$

برای اینکه خط گذرنده از دو نقطه $x = ۲$ و $x = ۲+k$ به خط مماس بر f در $x = ۲$ تبدیل شود، کافی است k به سمت صفر میل کند، پس:

$$f'(۲) = \lim_{k \rightarrow 0} m = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{۱۲-۲k}{k+۴} = \frac{۱۲}{۴} = ۳$$

$$f(x) = x + \frac{x}{f(x)} \Rightarrow (f(x))^۲ - xf(x) - x = 0$$

$$\Delta = x^۲ + ۴x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{۲}(x \pm \sqrt{x^۲ + ۴x})$$

از آنجا که طبق فرض $x > 0$ است، باید $f(x) > 0$ باشد؛ بنابراین $f(x) = \frac{1}{۲}(x - \sqrt{x^۲ + ۴x})$ قابل قبول نیست.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{۲}(x + \sqrt{x^۲ + ۴x}) = \frac{1}{۲}(x + \sqrt{(x+۲)^۲ - ۴})$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{۲}\left(1 + \frac{x+۲}{\sqrt{(x+۲)^۲ - ۴}}\right) \Rightarrow f'(-۲ + ۲\sqrt{۵}) = \frac{1}{۲}\left(1 + \frac{\sqrt{۵}}{۲}\right)$$

از تابع $y = \sqrt[3]{x-2}$ مشتق می‌گیریم:

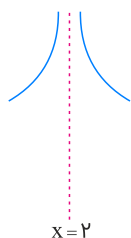
$$y = (x-2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}(x-2)^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}$$

حد مشتق تابع را اطراف $x=2$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

در نتیجه مشتق تابع در اطراف $x=2$ به صورت زیر است:



$$y = \sqrt[3]{4x+1} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} y^3 = 4x+1 \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{مشتق}} 3y^2 y' = 4 \Rightarrow y^2 y' = \frac{4}{3}$$

شیب خط را به دست می‌آوریم:

$$2y - 3x = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

پس شیب خط مماس در $x = 3$ برابر با $\frac{3}{2}$ است، در نتیجه: $f'(3) = \frac{3}{2}$
از طرفی نقطه‌ای به طول ۳ روی منحنی و خط مماس مشترک است:

$$2y - 3x = 3 \xrightarrow{x=3} 2y - 9 = 3 \Rightarrow y = 6$$

پس مختصات این نقطه مشترک $(3, 6)$ است و در نتیجه: $f(3) = 6$
حالا حاصل عبارت خواسته شده را پیدا می‌کنیم:

$$(ff')(3) = f(3) \times f'(3) = 6 \times \frac{3}{2} = 9$$

$$f'(x) = \frac{(2x+4)\sqrt{x^3-5x} - \frac{3x^2-5}{2\sqrt{x^3-5x}}(x^2+4x)}{x^3-5x}$$

$$\xrightarrow{x=-1} f'(-1) = \frac{2 \times 2 - \frac{-2}{4}(-3)}{4} = \frac{\frac{5}{2}}{4} = \frac{5}{8}$$

روش اول:

$$f(x) = 4x^2 - 8x + 3 \Rightarrow f'(x) = 8x - 8$$

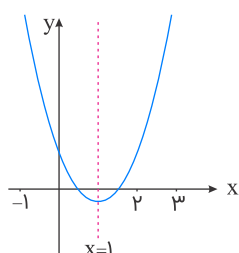
$$f'(3) = 8(3) - 8 = 16$$

قرینه شیب خط مماس برابر ۱۶- است. بنابراین:

$$f'(x) = 8x - 8 = -16 \Rightarrow 8x = -8 \Rightarrow x = -1$$

روش دوم:

$y = 4x^2 - 8x + 3$ تابعی درجه ۲ با محور تقارن ۱ است، پس داریم:



مطابق سهمی رسم شده، شیب خط مماس در $x = 3$ ، قرینه شیب خط مماس رسم شده در $x = -1$ است.

ابتدا به کمک روابط محاسبه مشتق، مشتق تابع $g(x)$ را به دست می آوریم؛ سپس به جای متغیر عدد (۱) را در ضابطه به دست آمده قرار می دهیم:

$$g(x) = \frac{-2}{\sqrt{3x^4 - 2x^3}} \Rightarrow g'(x) = \frac{(-2)'(\sqrt{3x^4 - 2x^3}) - (-2)(\sqrt{3x^4 - 2x^3})'}{(\sqrt{3x^4 - 2x^3})^2}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{0 + 2(\sqrt{3x^4 - 2x^3})'}{3x^4 - 2x^3}$$

$$(\sqrt{3x^4 - 2x^3})' = \frac{(3x^4 - 2x^3)'}{2\sqrt{3x^4 - 2x^3}} = \frac{12x^3 - 6x^2}{2\sqrt{3x^4 - 2x^3}}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{(12x^3 - 6x^2)}{\sqrt{(3x^4 - 2x^3)^3}} \Rightarrow g'(1) = \frac{12(1)^3 - 6(1)^2}{\sqrt{(3 - 2)^3}} = \frac{6}{1} = 6$$

ابتدا مختصات نقطه A را پیدا می‌کنیم و بعد شیب خط مماس بر منحنی در A را می‌یابیم:

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 1 \Rightarrow A(-1, 1)$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x}} \xrightarrow{x=-1} f'(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} : \text{معادله خط مماس}$$

با قرار دادن $x = -4$ در ضابطه تابع f و در معادله خط مماس، عرض نقاط B و C و در نتیجه طول پاره خط BC حساب می‌شود:

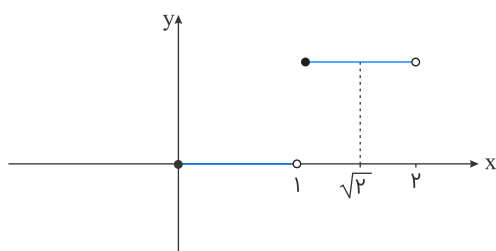
$$f(x) = \sqrt{-x} \xrightarrow{x=-4} f(-4) = 2$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \xrightarrow{x=-4} y = \frac{5}{2} \Rightarrow BC = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

دقت کنید طول ارتفاع مثلث ABC برابر با ۳ خواهد بود؛ پس:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\frac{1}{2} \times 3}{2} = \frac{3}{4}$$

حد داده شده همان تعریف مشتق در $x = \sqrt{2}$ است. می‌دانیم تابع $f(x) = [x]$ در $x = \sqrt{2}$ تابع ثابت بوده و مشتق یا شیب خط مماس در آن برابر صفر است.



دقت کنید که $f(x) = [x]$ در همه نقاط غیر صحیح که پاره خط افقی است مشتق صفر دارد و در نقاط صحیح مشتق پذیر نیست.

با استفاده از رابطه $u' \times \frac{ad - bc}{(cu + d)^2} = \left(\frac{au + b}{cu + d}\right)'$ ، مشتق تابع f را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{a\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{a + 2}{(\sqrt{x} + 1)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای f در $x = 16$ برابر با $f'(16)$ است که باید $\frac{1}{40}$ شود:

$$f'(16) = \frac{1}{40} \Rightarrow \frac{a + 2}{25} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{40} \Rightarrow a + 2 = 5 \Rightarrow a = 3$$

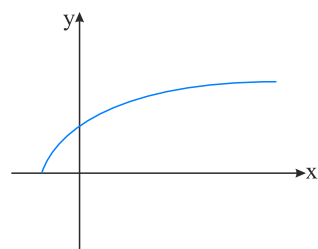
با جایگذاری $a = 3$ ، ضابطه f به صورت $f(x) = \frac{3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$ درمی‌آید. آهنگ تغییر متوسط تابع f در بازه $[1, 4]$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}}{3} = \frac{5}{18}$$

محاسبه آهنگ تغییر مشکل است، از طرفی تابع در نقطه $x = 2$ مشتق‌پذیر است و باتوجه به کوتاه بودن طول بازه، آهنگ متوسط خواسته شده بسیار نزدیک به آهنگ لحظه‌ای در نقطه $x = 2$ است.

$$f(x) = 3\sqrt{4x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3 \times 4}{2\sqrt{4x + 1}} \Rightarrow f'(2) = 2$$

پس پاسخ گزینه "۲" یا "۴" است. از طرفی باتوجه به نمودار تابع، آهنگ تغییر در این تابع نزولی است، پس پاسخ گزینه "۴" می‌باشد.



$$f(x) = 3\sqrt{4x + 1}$$